MUDANÇA DE BASE

Teorema 19: Sejam V um e.v. real de dimensão finita, $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$, $\gamma = \{w_1, \dots, w_n\}$ bases para V. Então existe uma única matriz $P \in M_n(\mathbb{R})$ invertível tal que para todo $u \in V$ tem-se que:

a) $[u]_\gamma = P\,[u]_\beta$

b) $[u]_\beta = P^{-1}[u]_\gamma$

P é denominada matriz de mudança da base β para a base γ.

Exemplo

① $\beta = \{(1,0,0);\ (0,1,0);\ (0,0,1)\}$

$\gamma = \{(1,1,1);\ (1,0,1);\ (1,0,-1)\}$

1° → representa cada $v \in \beta$ com comb. de γ

→ monta a mat.:

$$[P]_{\beta,\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$ (matriz de mudança de base β p/ γ)

57

2º → representa cada $v \in \mathcal{C}$ em rel. a β.

→ monta a matriz:

$$[P]_{\mathcal{C},\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$ (matriz de mudança de base $\mathcal{C}$ p/ β).

(2) $\beta = \{(-3,1);(-1,3)\}$

$\mathcal{C} = \{(-1,1);(1,1)\}$

$$[P]_{\beta,\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad [P]_{\mathcal{C},\beta} = \left([P]_{\beta,\mathcal{C}}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & -2/5 \\ 2/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

(3) $\beta = \{1, x, x^2\}$

$\mathcal{C} = \{2, 1-x, 1-x^2\}$ em $P_2(\mathbb{R})$

$$[P]_{\mathcal{C},\beta} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad [P]_{\beta,\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

MATRIZ QUE REPRESENTA UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR

Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita, e $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V, $\gamma = \{w_1, \dots, w_n\}$ base de W. Seja $T: V \to W$ uma transformação linear. O Teorema 14 nos diz que T fica bem determinada pelos elementos na base β. Assim cada $T(v_j) \in W$, pode ser escrito de modo único:

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} t_{ij} w_j \qquad \forall \ j = 1, \dots, n.$$

onde $t_{ij} \in \mathbb{R}$ $\forall \ i = 1, \dots, m$ e $\forall \ j = 1, \dots, n$.

Logo:

$$T(v_1) = \sum_{i=1}^{m} t_{i1} w_i$$

$$T(v_2) = \sum_{i=1}^{m} t_{i2} w_i$$

$$\vdots$$

$$T(v_n) = \sum_{i=1}^{m} t_{in} w_i$$

A matriz $[T]_{\beta, \gamma} = [t_{ij}]$ é a representação matricial da transformação linear T com relação à base ( ) β de V e a base ξ de W.

<u>Teorema 20</u>: Sejam V, W e.v. reais, β uma base de V e ξ uma base de W, $T: V \to W$ transformação linear. Então para todo $v \in V$,

$$[T(v)]_{\xi} = [T]_{\beta,\xi} [v]_{\beta}$$

<u>Teorema 21</u>: Sejam V e W esp. vetoriais de dimensão finita, β uma base de V, ξ uma base de W, $T: V \to W$, $P: V \to W$ transformações lineares. Então:

a) $[T+P]_{\beta,\xi} = [T]_{\beta,\xi} + [P]_{\beta,\xi}$

b) $[\lambda T]_{\beta,\xi} = \lambda [T]_{\beta,\xi} \quad \forall\ \lambda \in \mathbb{R}$.

<u>Teorema 22</u>: Considere U, V, W espaços vetoriais de dim. finita, onde β, ξ, γ são suas respectivas bases. Sejam $T: U \to V$, $P: V \to W$ transformações lineares. Então

$$[P \circ T]_{\beta,\gamma} = [P]_{\xi,\gamma} [T]_{\beta,\xi}.$$

Exemplos

① $T: \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(a + bx) \longmapsto (a, a+b)$$

$\beta = \{1, x\}$ $\qquad$ $\mathcal{C} = \{(1,0);(0,1)\}$

$[T]_{\beta, \mathcal{C}} = ?$

$T^{-1} = ?$

$[T^{-1}]_{\mathcal{C}, \beta} = ?$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \arrow[r, "T"] & \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \arrow[u, "S"] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad T \circ S = I_{\mathbb{R}^2}$$

$T \circ S(a,b) = I(a,b)$

$S(a,b) = c + dx$

$c = a$

$d = b - a$

② $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \longmapsto T(x,y) = (3x+y, x+3y)$$

$\beta = \{(1,-1);(1,0)\}$

$[T]_{can} = ?$

$[T^{-1}]_{can} = ?$

$[T]_{\beta, can} = ?$

$[T]_{\beta} = ?$

$[T]_{can, \beta} = ?$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "T"] & \mathbb{R}^2 \\ \mathbb{R}^2 \arrow[u, "S"] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad T \circ S = I$$

$\boxed{S = ?}$

3) $T: \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$

$$p(x) \longmapsto T(p(x)) = p'(x)$$

$$\beta = \{1, x, x^2, x^3\} \qquad [T]_{\beta,\gamma} = ?$$
$$\gamma = \{1, x, x^2\}$$

4) $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y,z) \longmapsto T(x,y,z) = (2x+y-z,\ 3x-2y+4z)$$

ESPAÇOS COM PRODUTO INTERNO

Definição 23: Seja V um espaço vetorial real. Uma aplicação $\langle \cdot,\cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

1 - simetria $\quad \langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle \quad \forall\, u,v \in V$

2 - positividade $\quad \langle u,u \rangle \geq 0 \quad \forall\, u \in V$ onde

$$\langle u,u \rangle = 0 \iff u = 0_V$$

3 - distributividade $\quad \langle u+v, w \rangle = \langle u,v \rangle + \langle u,w \rangle \quad \forall\, u,v,w \in V$

4 - homogeneidade $\quad \langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u,v \rangle, \quad \forall\, u,v \in V$
$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

define um PRODUTO INTERNO para o e.v. real V.

Observação:

Sejam $u, v, w \in V$. Então

$$(\text{i}) \ \langle u, v+w \rangle = \langle v+w, u \rangle = \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle$$
$$= \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$$

$$(\text{ii}) \ \langle u, \lambda v \rangle = \langle \lambda v, u \rangle = \lambda \langle v, u \rangle = \lambda \langle u, v \rangle.$$

Note que o produto interno é uma aplicação que é linear nas duas variáveis, ou seja, é uma aplicação bilinear.

Definição 24: Um espaço vetorial com produto interno, que denotamos por $(V, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ é um espaço vetorial real V, junto com um produto interno $\langle \cdot,\cdot \rangle$.

Exemplos

(1) $\mathbb{R}^n$, defina $\langle \cdot,\cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \longmapsto \langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$\langle \cdot,\cdot \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^n$.

(2) $\mathcal{C}([a,b])$, defina $\langle \cdot,\cdot \rangle : \mathcal{C}([a,b]) \times \mathcal{C}([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(f, g) \longmapsto \langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) g(x) dx$$

define um produto interno em $\mathcal{C}([a,b])$

③ No espaço vetorial $M_n(\mathbb{R})$, a aplicação

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(A, B) \longmapsto \langle A, B \rangle := tr(B^t A)$$

define um produto interno em $M_n(\mathbb{R})$.

④ $\mathcal{C}([a,b])$, seja $w \in \mathcal{C}([a,b])$ fixa e estritamente positiva. A aplicação $\langle \cdot , \cdot \rangle_w : \mathcal{C}([a,b]) \times \mathcal{C}([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\langle f, g \rangle_w = \int_a^b w(x) f(x) g(x)\, dx$ define um produto interno em $\mathcal{C}([a,b])$.

Exercício: Em $\mathbb{R}^n$, verificar se as aplicações abaixo definem produto interno:

1. $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, |y_i|$

2. $\langle x, y \rangle = \left| \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right|$

3. $\langle x, y \rangle = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \right)$

Ex para casa.

⑤ Seja $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ um e.v. real com produto interno e $T: V \rightarrow V$ um isomorfismo. Então a aplicação

$$f(\cdot , \cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u, v) \longmapsto f(u, v) = \langle T(u), T(v) \rangle$$

define um produto interno em V.

Dem:

1- Simetria:

$$f(u,v) = \langle T(u), T(v) \rangle$$
$$= \langle T(v), T(u) \rangle = f(v,u)$$

2- positividade:

$$f(u,u) = \langle T(u), T(u) \rangle \geq 0$$

$$f(u,u) = 0 \iff \langle T(u), T(u) \rangle = 0 \iff$$
$$T(u) = 0_V \iff u = 0_V.$$

3- distributividade:

$$f(u+w, v) = \langle T(u+w), T(v) \rangle$$
$$= \langle T(u) + T(w), T(v) \rangle$$
$$= \langle T(u), T(v) \rangle + \langle T(w), T(v) \rangle$$
$$= f(u,v) + f(w,v)$$

4- homogeneidade

$$f(\lambda u, v) = \langle T(\lambda u), T(v) \rangle$$
$$= \langle \lambda T(u), T(v) \rangle$$
$$= \lambda \langle T(u), T(v) \rangle$$
$$= \lambda f(u,v)$$

(6) $V \equiv$ espaço vetorial real com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $T: V \to V$ aplicação linear.
Se $\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle$ então T é injetora!

Dem:

Seja $u \in Ker(T)$, logo $T(u) = 0_V$, Assim,

$$\langle u, u \rangle = \langle T(u), T(u) \rangle = \langle 0_V, 0_V \rangle = 0 \iff$$

$u = 0_V$. Ou seja $Ker(T) = \{0_V\}$. Portanto T é injetora!

MATRIZ DO PRODUTO INTERNO

Sejam $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ espaço com produto interno e $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de V. Vamos mostrar que o produto interno pode ser completamente descrito em termos de uma determinada base por meio de uma matriz.

Definição 25: Sejam $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço vetorial real com produto interno, $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de V. A matriz $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ com elementos dados por:

$$a_{ij} = \langle v_j, v_i \rangle \quad \text{para} \quad i, j = 1, \dots, n$$

é denominada matriz do produto interno em relação à base β.

Exemplos:

① $\mathbb{R}^n$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ = base canônica

I_n é a matriz do p.i. em relação à base canônica

② $\mathbb{R}^3$, $\{v_1, v_2, v_3\}$ $\quad v_1 = (1,0,-1)$, $v_2 = (1,2,1)$
$v_3 = (0,-3,2)$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 6 & -4 \\ -2 & -4 & 13 \end{bmatrix}$$ é a matriz ~~do~~ do p.i em rel. à base β.

③ $\mathbb{R}^2$, $\{(1,-1); (1,1)\}$ $\quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

4) $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)\, q(x)\, dx$

$\beta = \{1, x, x^2\}$ $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}$

5) $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ $\quad \langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)\, q(x)\, dx$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

(*) Até aqui tem conteúdo para Lista 5.

DESIGUALDADE DE CAUCHY-SCHWARZ

Teorema 23: Seja $(V, \langle , \rangle)$ um espaço com produto interno. Então para todo $u, v \in V$,

$$\langle u, v\rangle^2 \leq \langle u, u\rangle \langle v, v\rangle.$$

Demonstração: Sejam $u, v \in V$. ~~tais~~ Se $\{u, v\}$ é l.d. então a igualdade é obtida facilmente. Consideremos então $\{u, v\}$ l.i., ou seja, $u + \lambda v \neq 0_V$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\langle u + \lambda v, u + \lambda v\rangle = \langle u, u\rangle + \langle u, \lambda v\rangle + \langle \lambda v, u\rangle + \lambda^2 \langle v, v\rangle$$

$$= \langle u, u\rangle + 2\lambda \langle u, v\rangle + \lambda^2 \langle v, v\rangle > 0$$

que é uma inequação do 2º grau na variável λ.

Considerando que a eq. $\langle u, u\rangle + 2\lambda\langle u, v\rangle + \lambda^2 \langle v, v\rangle = 0$, não possui raízes reais, devemos ter,

$$(2\langle u, v\rangle)^2 - 4\langle u, u\rangle\langle v, v\rangle < 0 \Rightarrow \langle u, v\rangle^2 < \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle$$

Exemplos :

① $u = (1, -2, 1)$ $\quad v = (3, -1, 1)$

② $\mathcal{C}([-1, 1])$ $\quad \langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx$

$f(x) = x \qquad g(x) = x^3$

Definição 26 : Seja V um espaço vetorial real. Uma norma em V é uma aplicação $\|\cdot\|$ que a cada $u \in V$ associa o número $\|u\|$ que possui as seguintes propriedades:

a) $\|u\| > 0$ p/ $u \neq 0_V$

$\|u\| = 0 \iff u = 0_V$

b) $\|\lambda u\| = |\lambda|\, \|u\|$; $\forall\, u \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$

c) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ $\quad \forall\, u, v \in V$

Um e.v. V munido de uma norma é denominado ESPAÇO NORMADO, que denotamos por $(V, \|\cdot\|)$

Exemplos:

① $\mathbb{R}^n$, $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{são normas}$$

② $M_n(\mathbb{R})$ $\quad \|A\|_\infty = \max\left\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| : 1 \leq i \leq n\right\}$

é norma

$$\|A\|_1 = \max\left\{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| : 1 \leq j \leq n\right\}$$

é norma

Teorema 24: Seja V um e.v. real, com p.i $\langle , \rangle$. Então a aplicação $q(\cdot) : V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$q(u) = \sqrt{\langle u, u \rangle}, \quad \forall u \in V$$

é uma norma.

PROVA:

1, 2 - OK!

$$q(u+v) = \sqrt{\langle u+v, u+v \rangle} \Rightarrow$$

$$q(u+v)^2 = \langle u+v, u+v \rangle$$

$$= \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle$$

#1

$$\leq \langle u,u\rangle + 2\,|\langle u,v\rangle| + \langle v,v\rangle$$

$$= \langle u,u\rangle + 2\sqrt{\langle u,v\rangle^2} + \langle v,v\rangle$$

$$\leq \langle u,u\rangle + 2\sqrt{\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle} + \langle v,v\rangle$$

$$= \left(\sqrt{\langle u,u\rangle}\right)^2 + 2\sqrt{\langle u,u\rangle}\sqrt{\langle v,v\rangle} + \left(\sqrt{\langle v,v\rangle}\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{\langle u,u\rangle} + \sqrt{\langle v,v\rangle}\right)^2$$

$$= \left(q(u) + q(v)\right)^2 \Rightarrow$$

$$q(u+v) \leq q(u) + q(v).$$

Definição 17 Seja V um espaço vetorial real. Uma aplicação

$$d : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u, v) \longmapsto d(u,v)$$

com as seguintes propriedades:

1 - $d(u,v) \geq 0 \quad , \quad \forall\, u,v \in V$
$d(u,v) = 0 \iff u = v$

2 - $d(u,v) = d(v,u) \quad \forall\, u,v \in V$

3 - $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v) \quad \forall\, u,v,w \in V$

define uma métrica no espaço vetorial V.

O espaço V munido de uma métrica d é denominado ESPAÇO MÉTRICO.

Teorema 15: Seja V um e.v. real com uma norma $\|\cdot\|$.
A aplicação

$$d : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(u,v) \longmapsto d(u,v) = \|u - v\|$$

define uma métrica em V

Dem: Exercício para casa.

Exemplo:

$\mathcal{C}([0,1])$

$$d(f,g) = \sqrt{\int_0^1 (f(x)-g(x))^2\,dx}$$

Verificar se d é métrica.

Sejam $u, v \overset{\neq 0}{\in} V$. Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwartz temos:

$$\langle u,v\rangle^2 \leq \langle u,u\rangle\langle v,v\rangle \Rightarrow$$

$$\frac{\langle u,v\rangle^2}{\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle} \leq 1 \Rightarrow$$

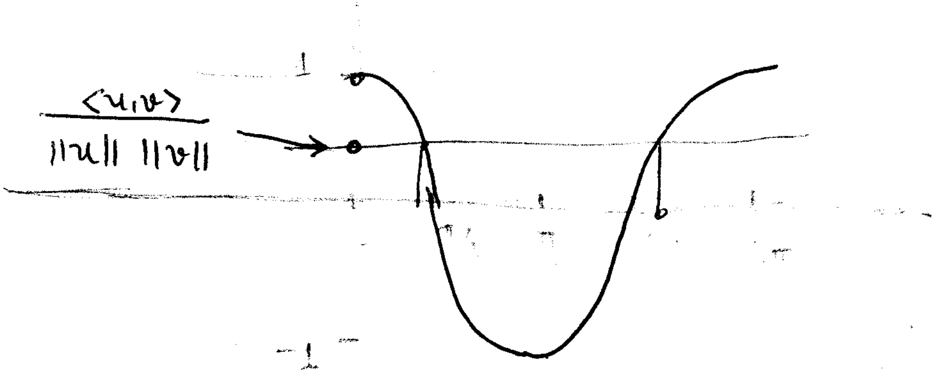
$$\sqrt{\frac{\langle u,v\rangle^2}{\langle u,u\rangle\langle v,v\rangle}} \leq 1 \Rightarrow$$

$$\frac{|\langle u,v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|} \leq 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \in [-1,1].$$

Assim $\exists\ \theta \in [0, 2\pi]$ tq

$$\frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} = \cos\theta$$



Se considerarmos em $[0, \pi]$ esse valor θ é único.

<u>Definição</u> 20 Seja V um e.v. real com produto interno. O ângulo entre dois elementos não-nulos $u, v \in V$ é definido como sendo o valor $\theta \in [0, \pi]$ que satisfaz a equação

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

<u>Definição</u> 21 Seja V um e.v. real com produto interno. Dizemos que os elementos $u, v \in V$ são ortogonais se, e somente se, $\langle u, v\rangle = 0$, e denotamos por $u \perp v$.

Exemplo

$\mathcal{C}([0,1])$ com o produto interno usual

Determinar o ângulo entre as funções $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$.

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 x\cdot x^2\,dx$$

$$= \int_0^1 x^3\,dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{4}$$

$$\langle f, f\rangle = \int_0^1 x\,x\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3} \qquad \|f\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow$$

$$\langle g, g\rangle = \int_0^1 x^2\cdot x^2\,dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1 = \frac{1}{5} \qquad \|g\| = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\theta = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{\sqrt{15}}} = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{15} \simeq \frac{3{,}87}{4} = 0{,}9675$$

<u>Definição</u> 30 Seja V um e.v. real com produto interno. Seja $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ um conjunto de V. Dizemos que S é um conjunto ortogonal se $\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall \ i \neq j$. Se, além disso, $\|v_j\| = 1 \quad \forall \ j = 1, \dots, n$ dizemos que S é um conj. ortonormal de V.

<u>Teorema</u> 26: Seja V um e.v. real com produto interno e $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ um conjunto ortogonal de V, onde $v_j \neq 0_V$ para todo $j = 1, \dots, n$. Então S é linearmente independente em V.

<u>Dem</u>: Exercício para casa.

<u>Exemplos</u>:

1) $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$ c/ p.i usual

$\{\text{sen}(x), \text{sen}(2x), \dots, \text{sen}(nx), \dots\}$ é ortogonal em rel. à esse p.i.

Usar relação

$$\text{sen}(nx)\,\text{sen}(mx) = \frac{\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)}{2}$$

A mesma coisa para o conjunto

$$\{1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx, \ldots\}$$

Relação:

$$\cos(nx)\cos(mx) = \frac{\cos((n-m)x) + \cos((n+m)x)}{2}$$

Exercício para casa.

BASE ORTOGONAL

Definição 31 Seja V um e.v. real de dimensão finita munido de um produto interno. Dizemos que uma base $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V é uma base ortogonal se β for um conjunto ortogonal. Se β for um conjunto ortonormal, dizemos que β é uma base ortonormal.

Teorema 27 Seja V um e.v. real de dimensão finita com produto interno e $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base ortogonal de V. Então todo $u \in V$ é escrito de modo único como

$$u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \quad \text{onde} \quad \alpha_i = \frac{\langle u, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle}.$$

Demonstração: Seja $u \in V$. Como $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de V, então $\exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j .$$

Vamos calcular o produto interno entre u e cada $v_i \in \beta$. Então:

$$\langle u, v_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j , v_i \right\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle v_j, v_i \rangle$$

$$= \alpha_i \langle v_i, v_i \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_i = \frac{\langle u, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} . \quad \forall\ i = 1, \ldots, n.$$

Exemplos:

① $\mathbb{R}^2$ $\qquad \beta = \{(1,+1); (-1,1)\}$ = base ortogonal.

Calcular as coordenadas de $v = (3,4) \in \mathbb{R}^2$ em relação à base β.

PROCESSO DE GRAM - SCHMIDT

Teorema: Considere V um e.v. real com produto interno. Seja $v_1, v_2, \dots, v_k, \dots$ sequência finita ou infinita de elementos de V e $S_k = [v_1, \dots, v_k]$ o subespaço gerado pelos k primeiros elementos. Então existe uma sequência correspondente de elementos $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ em V com as seguintes propriedades:

a) q_k é ortogonal a todo elemento do subespaço $[q_1, \dots, q_{k-1}]$

b) O subespaço $S_k = [v_1, \dots, v_k]$ é igual ao subespaço $W_k = [q_1, \dots, q_k]$.

c) A sequência $q_1, q_2, \dots, q_k$ é única a menos de uma constante multiplicativa, isto é, se existir uma outra sequência $q_1', q_2', \dots, q_n', \dots,$ de elementos de V satisfazendo (a), (b), então existem escalares $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ tais que $q_k' = c_k q_k$ $k = 1, \dots, n, \dots$

Dem: Vamos construir indutivamente $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$

Inicialmente, escolhemos $q_1 = v_1$. Assuma que já construímos os elementos $q_1, \ldots, q_r$ satisfazendo (a), (b). Construiremos q_{r+1}. Defina,

$$q_{r+1} := v_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i q_i$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{R}$, são escolhidos de modo conveniente.

Se $j \leq r$, calculamos:

$$\langle q_{r+1}, q_j \rangle = \langle v_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i q_i , q_j \rangle$$

$$= \langle v_{r+1}, q_j \rangle - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \langle q_i, q_j \rangle$$

$$= \langle v_{r+1}, q_j \rangle - \alpha_j \langle q_j, q_j \rangle$$

Assim, se $q_j \neq 0_V$, escolho $\alpha_j = \dfrac{\langle v_{r+1}, q_j \rangle}{\langle q_j, q_j \rangle}$.

Caso $q_j = 0_V$, então q_{r+1} é ortogonal a q_j p/ qualquer escolha de α_j. Logo q_{r+1} está bem definido e é ortogonal a $q_1, \ldots, q_r$, logo é ortogonal a todo elemento de $[q_1, \ldots, q_r]$. Logo (a) é válido.

Afirmamos que $S_{r+1} = [v_1, \ldots, v_{r+1}] = W_{r+1} = [q_1, \ldots, q_{r+1}]$

Por hipótese $S_r = W_r$. Então $q_1, \ldots, q_r \in S_r$ e S_{r+1}.

Mas $$q_{r+1} = \underbrace{v_{r+1}}_{\in S_{r+1}} - \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \alpha_i q_i}_{\in S_{r+1}} \in S_{r+1}$$

Assim $[q_1, \ldots, q_{r+1}] \subseteq [v_1, \ldots, v_{r+1}]$.

De modo análogo, $$v_{r+1} = \underbrace{q_{r+1}}_{\in W_{r+1}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{r} \alpha_i q_i}_{\in W_{r+1}}$$

Assim $[v_1, \ldots, v_{r+1}] \subseteq [q_1, \ldots, q_{r+1}]$.

Assim mostramos a prop. (b)

(c) é exercício!

Exemplo :

(1) $\mathbb{R}^2$ c/ p.i usual.

$\beta = \{ (2,1) \,;\, (1,1) \}$ base do $\mathbb{R}^2$

$\beta' \equiv$ ortogonal ? $\beta' = \{ q_1 , q_2 \}$

$q_1 = (2,1)$

$$q_2 = (1,1) - \frac{\langle (1,1) , q_1 \rangle}{\langle q_1 , q_1 \rangle} \cdot q_1$$